

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СТЕБЛИН ИЛЬЯ АЛЕКСАНДРОВИЧ  
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧЕ О  
ДЕФОРМАЦИИ ОРТОТРОПНОГО ЭЛЛИПСОИДА  
ВРАЩЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО  
ДАВЛЕНИЯ

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Основная образовательная программа СВ.5008.2017 «Механика и математическое  
моделирование»

Профиль «Биомеханика и робототехника»

Допущена к защите

Заведующий кафедрой:

д. ф.-м. н., профессор С. Б. Филиппов

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор С. М. Бауэр

Рецензент:

к. ф.-м. н., доцент Е. Б. Воронкова

Санкт-Петербург

2021

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY  
THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS  
MECHANICS AND MATHEMATICAL MODELING

STEBLIN ILIA

BACHELOR'S THESIS

NONCLASSICAL SHELL THEORIES IN THE PROBLEM  
OF DEFORMATION OF AN ORTHOTROPIC ELLIPSOID  
SHELL UNDER INTERNAL PRESSURE

Admitted for defence

Head of Department:

Prof. S. B. Filippov

Scientific Supervisor:

Prof. S. M. Bauer

Reviewer:

Associate Prof. E. B. Voronkova

Saint-Petersburg

2021

# Оглавление

Введение . . . . .	4
Постановка задачи . . . . .	5
Безмоментная теория оболочек вращения . . . . .	7
Механические характеристики и размеры оболочки глаза . . . . .	8
Определение перемещений точек срединной поверхности оболочки . . .	9
1.    Изотропная оболочка . . . . .	9
2.    Трансверсально-изотропная оболочка . . . . .	9
3.    Ортотропная оболочка . . . . .	10
Построение зависимости объём-давление . . . . .	11
1.    Вывод формул . . . . .	11
2.    Изотропная и трансверсально-изотропная оболочки . . . . .	14
3.    Случай ортотропной оболочки . . . . .	15
Исследование зависимости объём-давление с использованием пакета COMSOL Multiphysics . . . . .	17
Сравнение результатов . . . . .	21
Заключение . . . . .	23
Список литературы . . . . .	24

## Введение

В последнее время лечение некоторых глазных заболеваний всё чаще осуществляется посредством интравитреальных инъекций (ИВИ), так как из известных способов введения лекарственных веществ для доставки их к тканям глаза наибольшая концентрация препарата достигается именно при таком подходе [1]. Но, несмотря на простоту процедуры ИВИ, имеется вероятность возникновения осложнений на фоне кратковременного повышения внутриглазного давления (ВГД) – как отмечено в статье [2], проводится множество исследований, направленных на углубление и расширение современных знаний о влиянии повышенного ВГД на развитие глаукомного повреждения зрительного нерва.

Таким образом, непосредственно после введения ИВИ происходит кратковременное повышение ВГД, которое в свою очередь может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и диске зрительного нерва глаза. Поэтому в каждом отдельном случае важно оценивать возможное изменение ВГД, после введения некоторого объёма жидкости — обычно это 0.05 или 0.1 мл.

В данной работе глаз рассматривается как эллипсоидальная оболочка вращения, заполненная несжимаемой жидкостью. Необходимость рассмотрения эллипсоидальной оболочки объясняется тем, что склеральную оболочку глаза человека в общем случае нельзя считать сферической, так как в случае миопии часто склера представляет собой вытянутый эллипсоид, а при гиперметропии иногда оболочка глаза является сплюснутым эллипсоидом. Также в [3] отмечается, что склера является анизотропной оболочкой. Поэтому в общем случае в работе рассматривается ортотропная эллипсоидальная оболочка.

## Постановка задачи

Рассматривается деформация оболочки вращения, срединная поверхность которой представляет собой поверхность эллипсоида вращения. В общем случае оболочка считается ортотропной, и нагружена внутренним давлением  $p$ . По заданному значению давления можно определить деформацию оболочки, следовательно, и изменение объёма. Но необходимо решить обратную задачу: известен только введённый внутрь оболочки объём несжимаемой жидкости, требуется определить какое давление вызовет этот введённый объём.

Срединная поверхность оболочки задаётся в координатах, которые соответствуют линиям главных кривизн. На рис. 1 показан эллипсоид вращения, полученный вращением эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  вокруг оси  $z$ , а также введённые координаты  $(\theta, \varphi)$ .

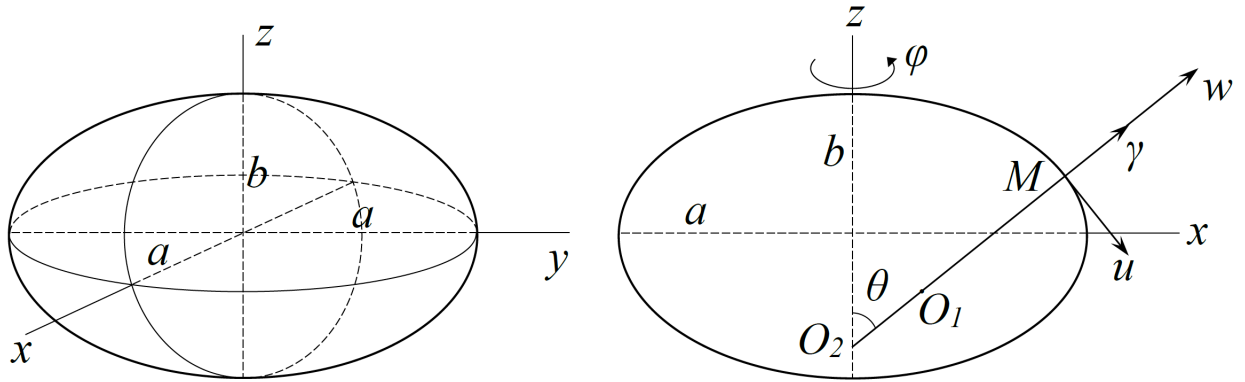


Рис. 1. Срединная поверхность оболочки, представляющая собой поверхность эллипсоида вращения

Здесь  $M$  – точка срединной поверхности, прямая  $O_1M$  перпендикулярна касательному вектору в точке  $M$ . Ось  $\gamma$  – нормаль к поверхности в точке  $M$ , координата  $\gamma$  определяет положение точки оболочки относительно срединной поверхности и меняется в пределах от  $-h/2$  до  $h/2$ , где  $h$  – толщина оболочки. Так как рассматривается осесимметричная задача, то все искомые функции зависят только от координаты  $\theta$ , и деформированное состояние срединной поверхности оболочки определяется двумя компонентами вектора перемещения её точек:  $w$  и  $u$  – нормальная и касательная компоненты соответственно. Отрезки  $O_1M$  и  $O_2M$  представляют собой радиусы главных

кривизн:

$$O_1 M = R_1 = \frac{a(1-k)}{(1-k \cos^2 \theta)^{3/2}}, \quad O_2 M = R_2 = \frac{a}{\sqrt{1-k \cos^2 \theta}}, \quad \text{где } k = 1 - \frac{b^2}{a^2}. \quad (1)$$

При нагружении в оболочке возникают нормальные и касательные напряжения, но удобно рассматривать, соответствующие им внутренние силы и моменты: тангенциальные силы  $T_\theta$  и  $T_\varphi$ , изгибающие моменты  $M_\theta$  и  $M_\varphi$ , поперечные силы  $N_\theta$  и  $N_\varphi$ , крутящие моменты  $H_{\theta\varphi}$  и  $H_{\varphi\theta}$ , сдвиговые силы  $S_{\theta\varphi}$  и  $S_{\varphi\theta}$ . Ниже (рис. 2) представлены внутренние силы и моменты, действующие на элемент оболочки.

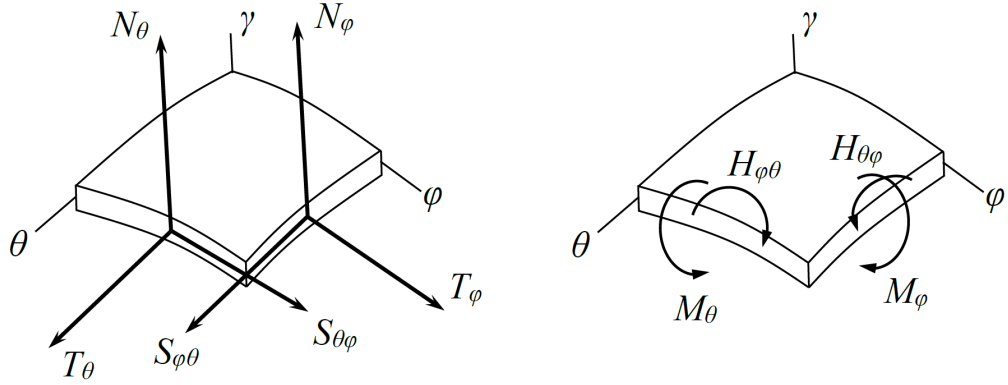


Рис. 2. Внутренние силы и моменты, действующие на площадках главных нормальных сечений

Также запишем обобщённый закон Гука для материала оболочки, который в общем случае считается ортотропным.

$$\begin{cases} e_\theta = \frac{1}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta\varphi}}{E_\varphi} \sigma_\varphi - \frac{\nu_{\theta\gamma}}{E_\gamma} \sigma_\gamma, & e_{\theta\varphi} = \frac{\tau_{\theta\varphi}}{G_{\theta\varphi}}, \\ e_\varphi = -\frac{\nu_{\varphi\theta}}{E_\theta} \sigma_\theta + \frac{1}{E_\varphi} \sigma_\varphi - \frac{\nu_{\varphi\gamma}}{E_\gamma} \sigma_\gamma, & e_{\theta\gamma} = \frac{\tau_{\theta\gamma}}{G_{\theta\gamma}}, \\ e_\gamma = -\frac{\nu_{\gamma\theta}}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{\gamma\varphi}}{E_\varphi} \sigma_\varphi + \frac{1}{E_\gamma} \sigma_\gamma, & e_{\varphi\gamma} = \frac{\tau_{\varphi\gamma}}{G_{\varphi\gamma}}. \end{cases} \quad (2)$$

Для ортотропного материала имеется девять независимых упругих постоянных:  $E_\theta, E_\varphi, E_\gamma$  – модули Юнга,  $\nu_{\theta\varphi}, \nu_{\theta\gamma}, \nu_{\varphi\gamma}$  – коэффициенты Пуассона,  $G_{\theta\varphi}, G_{\theta\gamma}, G_{\varphi\gamma}$  – модули сдвига.

Так как оболочка является телом вращения и нагружена осесимметрично (равномерным внутренним давлением), то в оболочке возникают только нормальные напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_\varphi$ , а также соответствующие им моменты. Для определения перемещений используется безмоментная теория оболочек.

# Безмоментная теория оболочек вращения

В основе безмоментной теории оболочек лежит предположение о том, что напряжения  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_\varphi$  распределены по толщине оболочки равномерно:

$$\sigma_\theta = \frac{T_\theta}{h}, \quad \sigma_\varphi = \frac{T_\varphi}{h} \quad (3)$$

Принимая (3), с точностью  $1 \pm k_i \gamma \approx 1$  из формул для моментов можно получить  $M_\theta = 0$ ,  $M_\varphi = 0$ .

Уравнения равновесия для тангенциальных сил  $T_\theta$  и  $T_\varphi$  будут выглядеть следующим образом [4]:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} \frac{dT_\theta}{d\theta} + (T_\theta - T_\varphi) \frac{\text{ctg} \theta}{R_2} = 0, \\ \frac{T_\theta}{R_1} + \frac{T_\varphi}{R_2} = p. \end{cases} \quad (4)$$

А для соотношений упругости [4]:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\theta} + w = \frac{R_1}{h} (a_{\theta\theta} T_\theta + a_{\theta\varphi} T_\varphi) - a_{\theta\gamma} \frac{p}{2} R_1, \\ u \text{ctg} \theta + w = \frac{R_2}{h} (a_{\theta\varphi} T_\theta + a_{\varphi\varphi} T_\varphi) - a_{\varphi\gamma} \frac{p}{2} R_2. \end{cases} \quad (5)$$

где  $a_{\theta\theta} = 1/E_\theta$ ,  $a_{\varphi\varphi} = 1/E_\varphi$ ,  $a_{\theta\varphi} = -\nu_{\theta\varphi}/E_\varphi$ ,  $a_{\theta\gamma} = -\nu_{\theta\gamma}/E_\gamma$ ,  $a_{\varphi\gamma} = -\nu_{\varphi\gamma}/E_\gamma$ .

Также для нормальной компоненты перемещения точек оболочки имеется следующее выражение [4]:

$$u_\gamma = w + \gamma \left( a_{\theta\gamma} \frac{T_\theta}{h} + a_{\varphi\gamma} \frac{T_\varphi}{h} - a_{\gamma\gamma} \frac{p}{2} \right) + \gamma^2 a_{\gamma\gamma} \frac{p}{2}, \quad \text{где } a_{\gamma\gamma} = 1/E_\gamma. \quad (6)$$

Таким образом, требуется определить тангенциальные силы из системы (4), затем, подставляя найденные  $T_\theta$  и  $T_\varphi$  в систему (5), можно определить компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки.

# Механические характеристики и размеры оболочки глаза

Склеральная оболочка глаза взрослого человека в норме имеет форму, близкую к сферической с радиусом 12 мм. Но довольно часто причиной таких дефектов зрения как миопия или гиперметропия является удлинение или уменьшение передне-задней оси глаза. По некоторым данным длина передне-задней оси при миопии в крайне редких случаях может достигать 34 мм, а при гиперметропии – 18 мм. Поэтому далее все расчёты будут проводится при  $a = 12$  мм, а длина полуоси  $b$  изменяется от 9 до 17 мм. Толщина  $h$  склеральной оболочки принимается равной 0.5 мм.

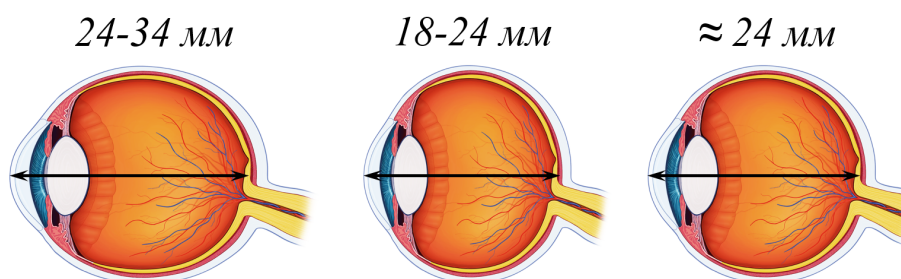


Рис. 3. Форма склеральной оболочки при миопии (слева), гиперметропии (в центре) и в норме

В [5] говорится, что склера, являясь трансверсально-изотропной тканью, характеризуется более низким модулем упругости в радиальном направлении, чем в продольном и поперечном. Также в [5] отмечается, что при миопии модуль упругости в продольном направлении может быть несколько ниже относительно значения модуля упругости в поперечном направлении. Поэтому в расчётах рассматриваются и сравниваются три вида оболочки: изотропная, трансверсально-изотропная и ортотропная. За базовый параметр берется значение модуля упругости  $E = 14.3$  МПа как в работе [3]. Используемые далее значения упругих постоянных:

$$E_{\theta} = E \pm 0.3 \text{ МПа}, \quad E_{\varphi} = E \mp 0.3 \text{ МПа}, \quad E_{\gamma} = E/50 \text{ МПа},$$

$$\nu_{\theta\varphi} = 0.48, \quad \nu_{\theta\gamma} = \nu_{\varphi\gamma} = 0.02.$$



# Определение перемещений точек срединной поверхности оболочки

Тангенциальные силы  $T_\theta$  и  $T_\varphi$ , как показано в [6], нетрудно определить из системы (4); для замкнутой оболочки выражения для них будут иметь вид:

$$T_\theta = \frac{pa}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - k \cos^2 \theta}}, \quad T_\varphi = \left(1 - \frac{k}{1 - k} \sin^2 \theta\right) T_\theta. \quad (7)$$

## 1. Изотропная оболочка

Определим компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности изотропной оболочки, для которой  $E = 14.3$  МПа,  $\nu = 0.48$ . Для удобства вводятся безразмерные величины:

$$\tilde{u} = \frac{u}{h}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{h}, \quad \widetilde{R}_1 = \frac{R_1}{a}, \quad \widetilde{R}_2 = \frac{R_2}{a}, \quad \widetilde{T}_\theta = \frac{2T_\theta}{pa}, \quad \widetilde{T}_\varphi = \frac{2T_\varphi}{pa}, \quad K = \frac{pa^2}{2Eh^2}, \quad Q = \frac{pa\nu}{2Eh}. \quad (8)$$

тогда систему (5) можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\theta} + \tilde{w} = K \cdot \widetilde{R}_1 (\widetilde{T}_\theta - \nu \widetilde{T}_\varphi) + Q \cdot \widetilde{R}_1, \\ \tilde{u} \operatorname{ctg} \theta + \tilde{w} = K \cdot \widetilde{R}_2 (\widetilde{T}_\varphi - \nu \widetilde{T}_\theta) + Q \cdot \widetilde{R}_2, \end{cases} \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (9)$$

из которой аналитически можно найти компоненты перемещения  $u$  и  $w$

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= K \cdot F(\theta) \sin \theta + Q \cdot G(\theta) \sin \theta, \\ \tilde{w} &= K \cdot \left( \widetilde{R}_2 (\widetilde{T}_\varphi - \nu \widetilde{T}_\theta) - \cos \theta \cdot F(\theta) \right) + Q \cdot \left( \widetilde{R}_2 - \cos \theta \cdot G(\theta) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{где } F(\theta) = \begin{cases} A \cdot \operatorname{arctanh}(\sqrt{k} \cos \theta) + B \cdot \frac{\cos \theta}{1 - k \cos^2 \theta}, & \text{если } a \geq b \\ -A \cdot \operatorname{arctan}(\sqrt{-k} \cos \theta) + B \cdot \frac{\cos \theta}{1 - k \cos^2 \theta}, & \text{если } a \leq b \end{cases}$$

$$G(\theta) = \frac{k \cos \theta}{\sqrt{1 - k \cos^2 \theta}}, \quad A = \sqrt{|k|} \left( 0.5 - \nu - \frac{1}{1 - k} \right), \quad B = 0.5k(1 - 2\nu).$$

## 2. Трансверсально-изотропная оболочка

Для трансверсально-изотропной оболочки с параметрами

$$E_\theta = E_\varphi = E = 14.3 \text{ МПа},$$

$$E_\gamma = E' = E/50 \text{ МПа}, \quad \nu_{\theta\varphi} = \nu = 0.48, \quad \nu_{\theta\gamma} = \nu_{\varphi\gamma} = \nu' = 0.02$$

Нормальная и касательная компоненты перемещений также имеют вид (10), но для постоянной  $Q$  в этом случае имеем:

$$Q = \frac{pa\nu'}{2E'h} \quad (11)$$

### 3. Ортотропная оболочка

Параметры оболочки:

$$E_\theta = E \pm 0.3 = 14.3 \pm 0.3 \text{ МПа}, \quad E_\varphi = E \mp 0.3 = 14.3 \mp 0.3 \text{ МПа}, \quad E_\gamma = E/50 \text{ МПа},$$

$$\nu_{\theta\varphi} = 0.48, \quad \nu_{\theta\gamma} = \nu_{\varphi\gamma} = \nu = 0.02.$$

В силу симметрии уравнений (2) имеется следующая зависимость:  $E_\theta\nu_{\theta\varphi} = E_\varphi\nu_{\varphi\theta}$ .

Также введены следующие константы:

$$K_\theta = \frac{pa^2}{2E_\theta h^2}, \quad K_\varphi = \frac{pa^2}{2E_\varphi h^2}, \quad K_\gamma = \frac{pa\nu}{2E_\gamma h}. \quad (12)$$

Система (5) в данном случае:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\theta} + \tilde{w} = K_\theta \cdot \widetilde{R}_1 \left( \widetilde{T}_\theta - \nu_{\varphi\theta} \widetilde{T}_\varphi \right) + K_\gamma \cdot \widetilde{R}_1, \\ \tilde{u} \operatorname{ctg} \theta + \tilde{w} = K_\varphi \cdot \widetilde{R}_2 \left( \widetilde{T}_\varphi - \nu_{\theta\varphi} \widetilde{T}_\theta \right) + K_\gamma \cdot \widetilde{R}_2, \end{cases} \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (13)$$

Откуда также аналитически можно получить выражения для компонент перемещения:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= K_\theta \cdot F_1(\theta) \sin \theta - K_\varphi \cdot F_2(\theta) \sin \theta + K_\gamma \cdot G(\theta) \sin \theta, \\ \tilde{w} &= K_\varphi \cdot \widetilde{R}_2 \left( \widetilde{T}_\varphi - \nu_{\theta\varphi} \widetilde{T}_\theta \right) - \cos \theta \cdot (K_\theta \cdot F_1(\theta) - K_\varphi \cdot F_2(\theta)) + \\ &\quad + K_\gamma \cdot \left( \widetilde{R}_2 - \cos \theta \cdot G(\theta) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } F_1(\theta) = \begin{cases} A \cdot \operatorname{arctanh}(\sqrt{k} \cos \theta) + B \cdot \frac{\cos \theta}{1 - k \cos^2 \theta} + C \cdot \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}, & \text{если } a \geq b \\ -A \cdot \operatorname{arctan}(\sqrt{-k} \cos \theta) + B \cdot \frac{\cos \theta}{1 - k \cos^2 \theta} + C \cdot \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}, & \text{если } a \leq b \end{cases}$$

$$A = \frac{\sqrt{|k|}}{2} \left( \frac{(1 - \nu_{\varphi\theta})(3 - k)}{1 - k} - \nu_{\varphi\theta} \right), \quad B = 0.5k(1 - 2\nu_{\varphi\theta}), \quad C = \frac{1 - \nu_{\varphi\theta}}{2(1 - k)},$$

$$F_2(\theta) = \begin{cases} D \cdot \operatorname{arctanh}(\sqrt{k} \cos \theta) + S \cdot \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}, & \text{если } a \geq b \\ -D \cdot \operatorname{arctan}(\sqrt{-k} \cos \theta) + S \cdot \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}, & \text{если } a \leq b \end{cases}$$

$$D = \sqrt{|k|} \frac{2 - \nu_{\theta\varphi}}{1 - k}, \quad S = \frac{1 - \nu_{\theta\varphi}}{2(1 - k)}.$$

Стоит отметить, что в данном случае значение нормального перемещения не ограничено в полюсе оболочки, из-за присутствия в выражении для  $\tilde{w}$  слагаемого вида  $Const \cdot \ln(1 - \cos \theta)$ .

# Построение зависимости объём-давление

## 1. Вывод формул

Можно заметить, что перемещения в выражениях (10, 14) зависят от давления  $p$  линейно. Найденные перемещения описывают срединную поверхность оболочки после деформации. Очевидно, что после деформации под действием внутреннего давления оболочка вращения останется оболочкой вращения. Рассмотрим часть оболочки до и после деформации — точка срединной поверхности  $M_1$  перейдёт в точку  $M_2$  (см. рис. 4)

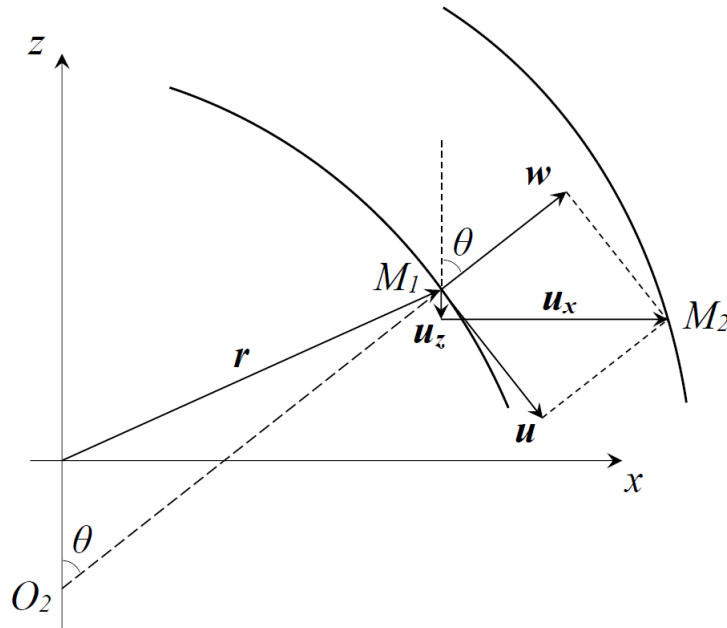


Рис. 4. Некоторая часть срединной поверхности оболочки до и после деформации

Отрезок  $O_2M_1 = R_2$ . До деформации положение точки  $M_1$  можно задать радиус-вектором в декартовой системе координат  $(x, z)$ :

$$\bar{r} = \left( R_2 \sin \theta, \frac{b^2}{a^2} R_2 \cos \theta \right). \quad (15)$$

Если ввести перемещения  $u_x, u_z$  — в направлении оси  $x$  и  $z$  соответственно:

$$u_x = w \sin \theta + u \cos \theta, \quad u_z = w \cos \theta - u \sin \theta, \quad (16)$$

то положение точки  $M_2$  будет задаваться вектором:

$$\bar{r}_2 = \left( R_2 \sin \theta + u_x, \frac{b^2}{a^2} R_2 \cos \theta + u_z \right) \quad (17)$$

Таким образом, имеем радиус вектор, описывающий срединную поверхность оболочки после деформации. Предположим, что после деформации срединная поверхность оболочки также является поверхностью эллипсоида вращения, но уже с полуосями  $\tilde{a} = a + w(\pi/2)$  и  $\tilde{b} = b + w(0)$ , тогда компоненты вектора  $\bar{r}_2$  должны удовлетворять уравнению эллипса:

$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{z^2}{\tilde{b}^2} \approx 1 \quad (18)$$

или, записывая вместо  $x$  и  $z$  компоненты вектора  $\bar{r}_2$  в (18), для  $\forall \theta \in [0, \pi/2]$  получим:

$$\xi(\theta) = \frac{1}{(a + w(\pi/2))^2} (R_2 \sin \theta + u_x)^2 + \frac{1}{(b + w(0))^2} \left( \frac{b^2}{a^2} R_2 \cos \theta + u_z \right)^2 \approx 1. \quad (19)$$

Теперь, подставляя найденные перемещения (10) в функцию  $\xi(\theta)$ , можно убедиться, что изотропная и трансверсально-изотропная эллипсоидальные оболочки вращения после деформации вновь переходят в эллипсоидальные оболочки вращения с полуосями  $a + w(\pi/2)$  и  $b + w(0)$ . Это утверждение можно принимать с большой точностью — ниже представлены графики функции  $\xi(\theta)$  на отрезке  $[0, \pi/2]$ , отклонение которой от единицы очень мало.

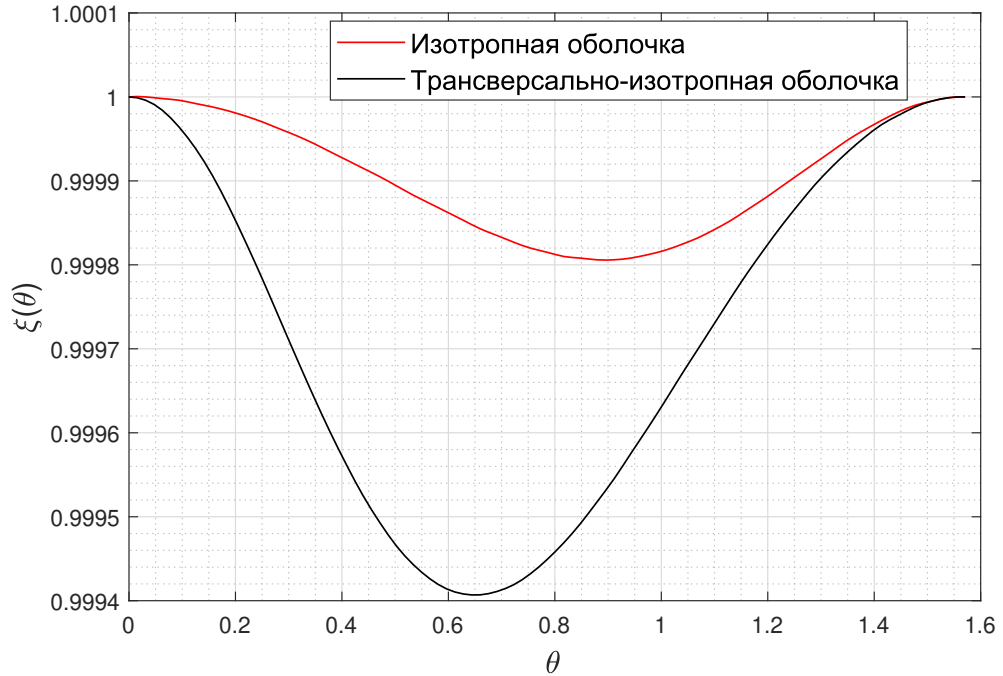


Рис. 5. Значение функции  $\xi(\theta)$  для изотропной и трансверсально-изотропной оболочки с полуосями  $a = 12$  мм и  $b = 9$  мм, и для значения давления  $p = 45$  мм рт. ст.

Для построения зависимости объём-давление найдём сначала изменение объёма  $\Delta V = V_2 - V_1$ , где  $V_1$  — внутренний объём оболочки до деформации, а  $V_2$  — после.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi a^2 b, \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi (a + w(\pi/2))^2 (b + w(0)) \quad (20)$$

Раскрывая скобки в (20) и пренебрегая слагаемым  $(w(\pi/2))^2 w(0)$  (так как перемещения малые), получим:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (2ab \cdot w(\pi/2) + b(w(\pi/2))^2 + a^2 w(0) + 2a \cdot w(\pi/2) w(0)) \quad (21)$$

Из формул (10, 14) видно, что перемещения зависят от давления  $p$  линейно, поэтому можно вынести  $p$  как множитель и представить нормальную компоненту перемещения  $w$  как  $w = p \cdot H(\theta)$ , где функция  $H(\theta)$  от давления не зависит. Тогда из (21) имеем квадратное уравнение относительно  $p$ :

$$p^2 \left[ 2aH\left(\frac{\pi}{2}\right) H(0) + b \left( H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^2 \right] + p \left[ 2abH\left(\frac{\pi}{2}\right) + a^2 H(0) \right] - \frac{3\Delta V}{4\pi} = 0,$$

откуда  $p = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$ , где  $A = 2aH\left(\frac{\pi}{2}\right) H(0) + b \left( H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^2$ ,  $B = 2abH\left(\frac{\pi}{2}\right) + a^2 H(0)$ ,  $C = \frac{3\Delta V}{4\pi}$ . (22)

В случае ортотропной оболочки нормальная компонента перемещения не ограничена в полюсе оболочки. Но, предположим, что эллипсоидальная ортотропная оболочка после деформации остаётся эллипсоидальной. Тогда из (17,18) можно получить:

$$\tilde{b} = \sqrt{\frac{\tilde{a}^2 z^2}{\tilde{a}^2 - x^2}} = \frac{\tilde{a} \left( \frac{b^2}{a^2} R_2 \cos \theta + u_z \right)}{\sqrt{\tilde{a}^2 - (R_2 \sin \theta + u_x)^2}}, \quad (23)$$

в левой части стоит константа, поэтому правая часть должна быть равна  $\tilde{b}$  при любом  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Как видно из (14) нормальная компонента перемещения имеет конечное значение при  $\theta = \pi/2$ , поэтому возьмем значение  $\theta$  близкое к  $\pi/2$  — например,  $\theta = 1.55$ . Подставляя в правую часть (23) значение  $\theta = 1.55$ , найдём  $w(0)$ :

$$w(0) = \frac{\tilde{a} \left( \frac{b^2}{a^2} R_2 (1.55) \cos 1.55 + u_z (1.55) \right)}{\sqrt{\tilde{a}^2 - (R_2 (1.55) \sin 1.55 + u_x (1.55))^2}} - b. \quad (24)$$

## 2. Изотропная и трансверсально-изотропная оболочки

Во всех расчётах вводимый внутрь оболочки объём несжимаемой жидкости полагается равным 0.05 мл ( $\Delta V = 0.05$  мл).

Для построения зависимости изменения давления от длины полуоси  $b$  используются формулы (10, 22). Ниже (рис. 6) приведен график этой зависимости для изотропной и трансверсально-изотропной оболочек.

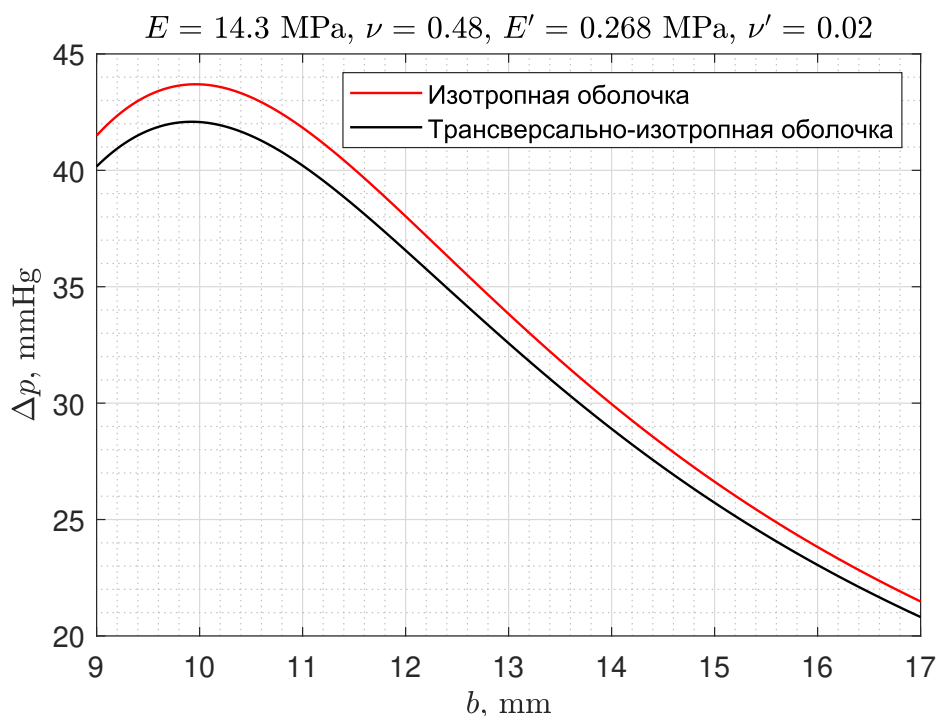


Рис. 6. Изменение значения внутреннего давления для изотропной и трансверсально-изотропной оболочек при различной длине полуоси  $b$

Из рис. 6 видно, что для сплюснутой оболочки значения изменения давления получились больше, чем для вытянутой оболочки. Несмотря на то, что с увеличением параметра  $b$  внутренний объём оболочки увеличивается, на графике можно наблюдать, что значение изменения давления сначала немного растёт и достигает своего максимума при  $b \approx 10$  мм, а затем начинает убывать. То есть на значение внутреннего давления влияет не только начальный объём оболочки, но и её форма. Также весомый вклад вносит учёт анизотропии — для трансверсально-изотропной оболочки значения изменения давления меньше, чем для изотропной. Ниже представлен график, отражающий как значение модуля упругости в направлении толщины влияет на получаемые значения

внутреннего давления.

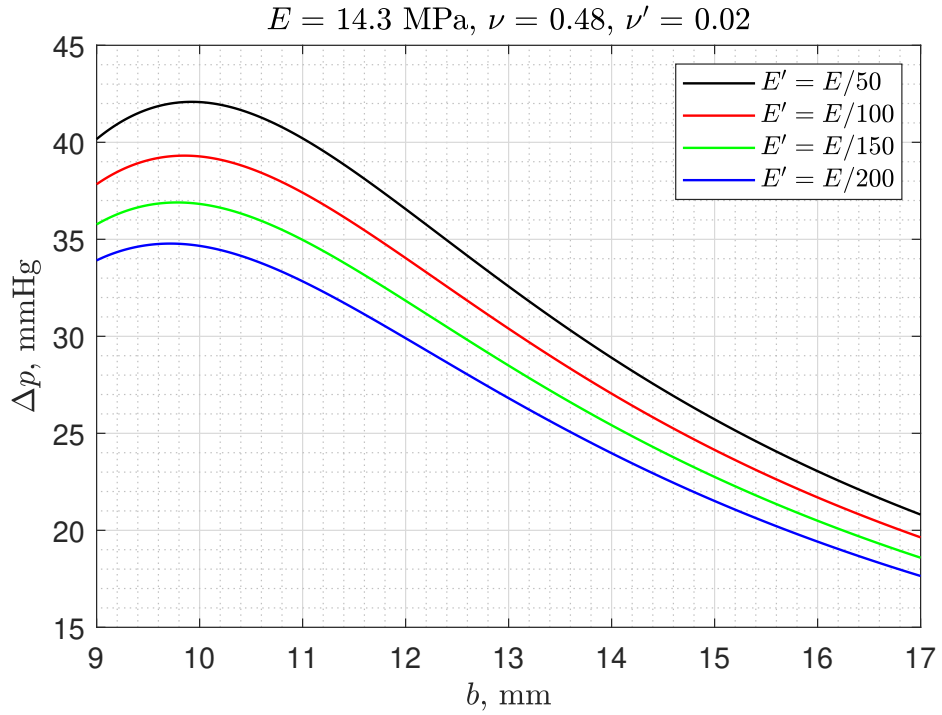


Рис. 7. Влияние отношения модулей упругости на значения внутреннего давления.

### 3. Случай ортотропной оболочки

Сначала строится график зависимости изменения объёма от внутреннего давления. Значение внутреннего давления меняется от 1 до 100 мм рт. ст. с шагом 1, для вычисления изменения объёма используется формула (21), где значение нормального перемещения в точке  $\theta = \pi/2$  находится с помощью (14), а в точке  $\theta = 0$  с использованием (24). После этого проводится интерполяция полученных данных полиномом второй степени. Таким образом, можно получить зависимость изменения давления от величины введенного внутрь оболочки объёма. Ниже представлен пример для оболочки с параметрами  $E_\theta = 13.9$  МПа,  $E_\varphi = 14.7$  МПа,  $E_\theta = 13.9$  МПа,  $\nu_{\theta\varphi} = 0.48$ ,  $\nu_{\theta\gamma} = \nu_{\varphi\gamma} = 0.02$ ,  $b = 9$  мм (рис. 8). Подставляя в полученный интерполяционный многочлен значение  $\Delta V = 0.05$ , найдём значение изменения давления соответствующее этому изменению объёма. На рис. 9 представлена зависимость изменения давления от длины полуоси  $b$ .

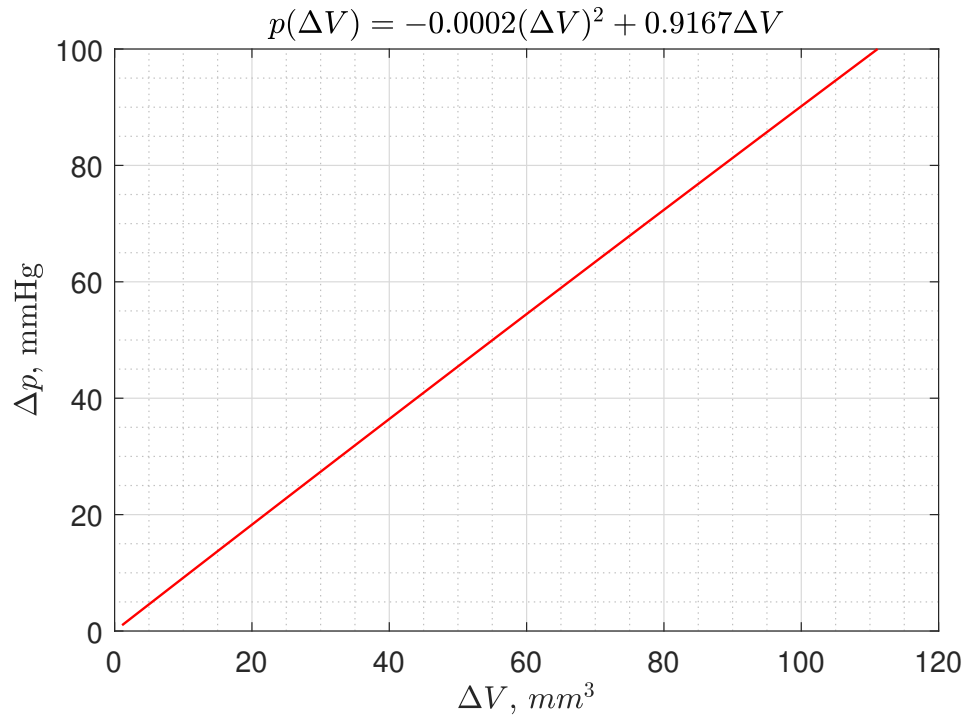


Рис. 8. Зависимость изменения давления от введённого внутрь оболочки объёма несжимаемой жидкости, полученная интерполированием значений.

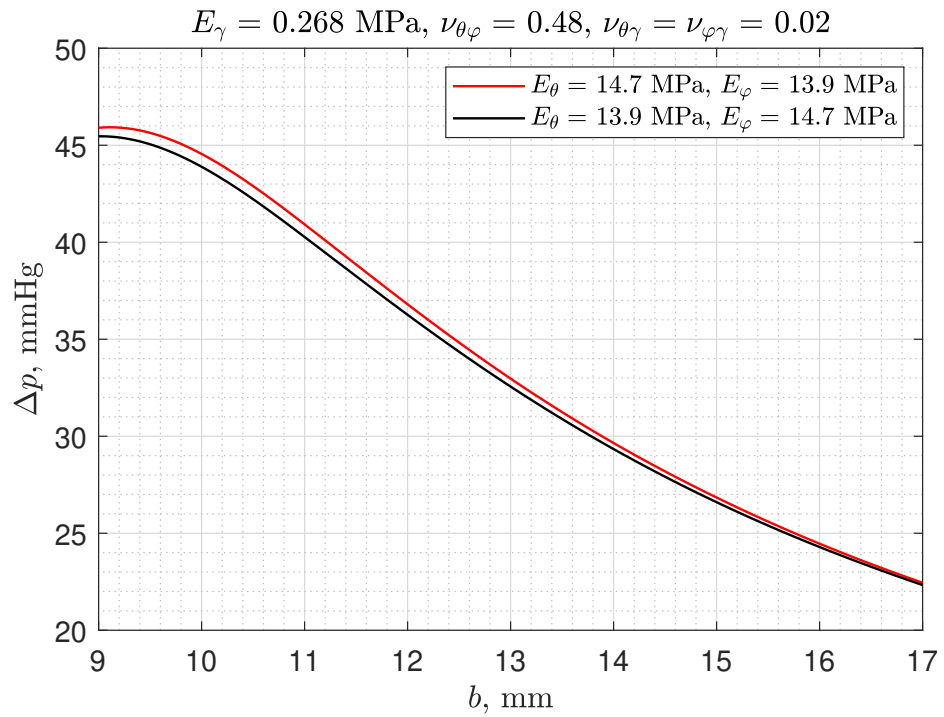


Рис. 9. Изменение значения внутреннего давления для ортотропных оболочек при различной длине полуоси  $b$ .



# Исследование зависимости объём-давление с использованием пакета COMSOL Multiphysics

В данной главе поставленная задача решается с использованием конечно-элементного моделирования в пакете COMSOL Multiphysics.

Так как рассматривается осесимметричная задача, то в качестве рабочего пространства выбирается плоскость с осью симметрии  $r = 0$ . Положение точек на этой плоскости задаётся парой координат  $(r, z)$ . Положение точки  $M$  срединной поверхности можно задать вектором  $\bar{\eta} = (R_2 \sin \theta, (b/a)^2 R_2 \cos \theta)$ . Тогда внутренняя и внешняя поверхности оболочки можно задать векторами  $\bar{r}_i = \bar{\eta} - 0.5h \cdot \bar{n}$  и  $\bar{r}_e = \bar{\eta} + 0.5h \cdot \bar{n}$  соответственно, где  $\bar{n} = (\sin \theta, \cos \theta)$  — нормаль к срединной поверхности в точке  $M$ . Таким образом, внутренняя и внешняя поверхности задаются параметрически в рабочей плоскости. Ниже представлен созданный профиль оболочки.

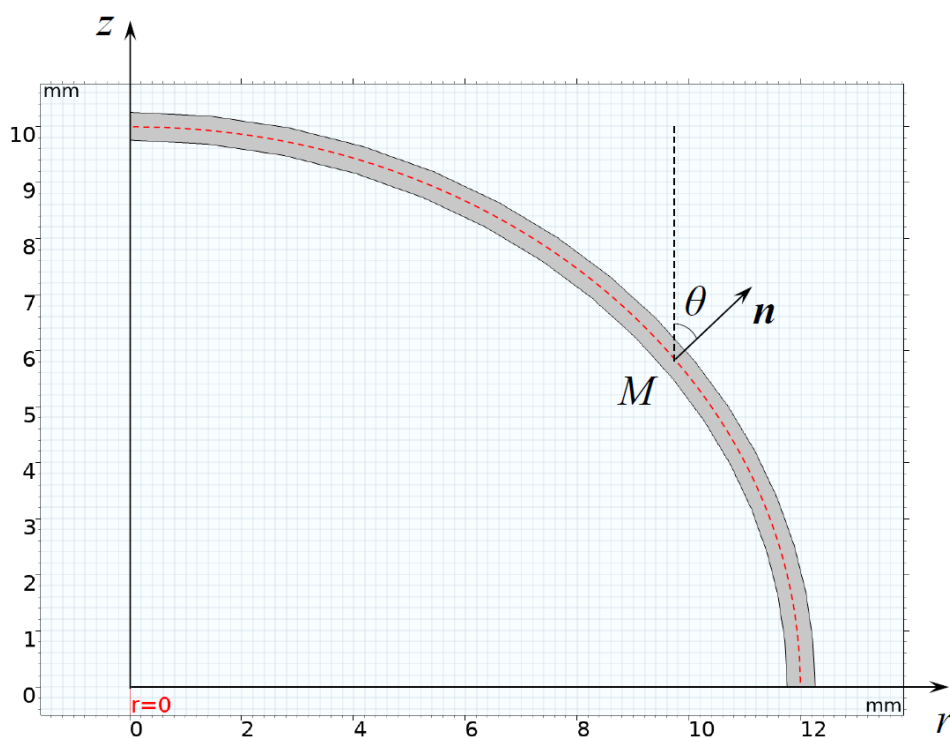


Рис. 10. Созданный профиль оболочки.

Для расчёта трансверсально-изотропной и ортотропной оболочек также необходимо ввести локальную систему координат, для того чтобы можно было задать свойства ортотропного материала (рис. 11).

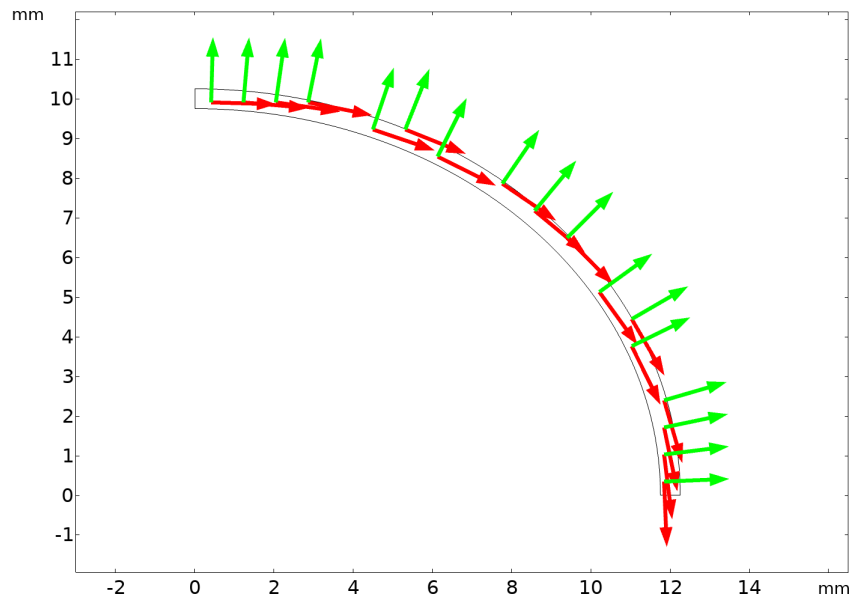


Рис. 11. Заданная локальная система координат, красные векторы — касательное направление, зелёные — нормальное.

Далее задаются свойства материала, граничные условия (касательное перемещение в полюсе и на экваторе оболочки должно равняться 0) и внутренняя поверхность нагружается давлением  $p$ . После этого производится разбиение модели на элементы, в качестве размера элемента выбирается половина толщины оболочки.

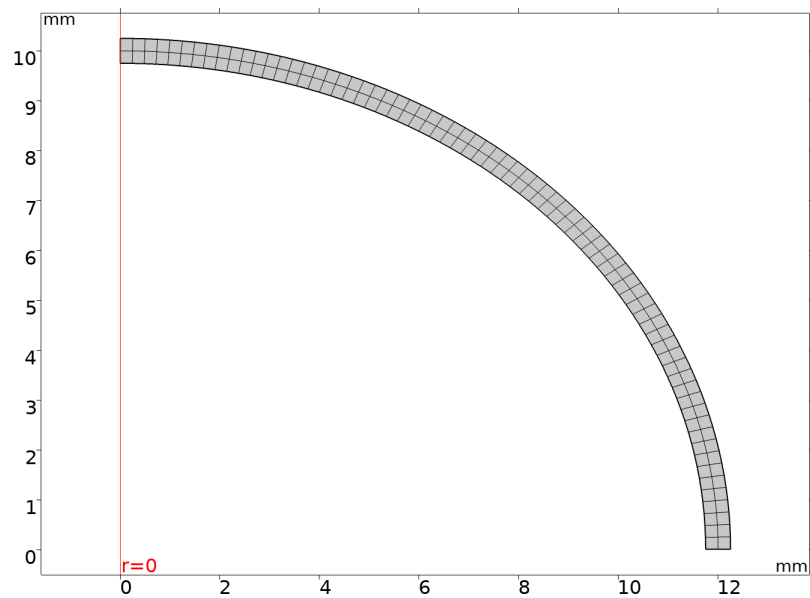


Рис. 12. Разбиение модели на элементы, размер элемента равен  $0.5h$

Ниже приведён пример расчёта сферической ортотропной оболочки при нагружении давлением  $p = 45$  мм рт. ст.

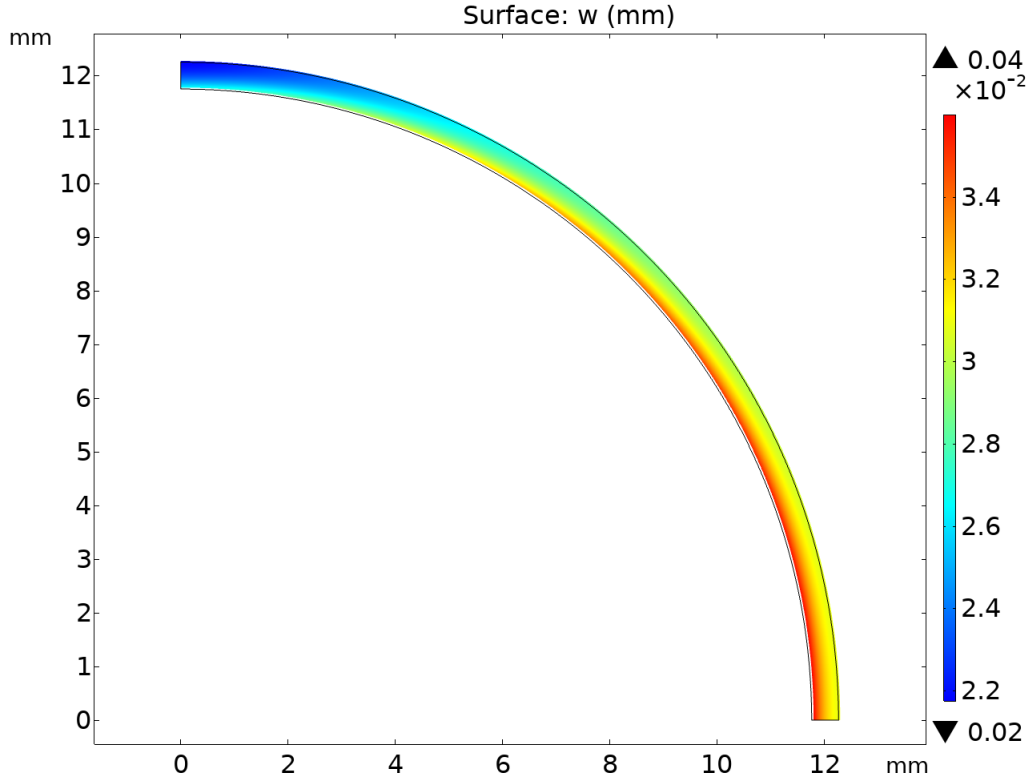


Рис. 13. Распределение значений нормального перемещения точек ортотропной сферической оболочки

Для вычисления изменения объёма оболочки используется интегрирование по её внутренней поверхности — применяется формула Гаусса-Остроградского: пусть  $S_1, S_2$  — поверхности оболочки до и после деформации соответственно, задаваемые векторами  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$ , а  $\bar{n}_1$  и  $\bar{n}_2$  — нормали к этим поверхностям. Тогда изменение объёма можно вычислить следующим образом:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3} \left[ \iint_{S_2} (\bar{r}_2 \cdot \bar{n}_2) dS_2 - \iint_{S_1} (\bar{r}_1 \cdot \bar{n}_1) dS_1 \right] \quad (25)$$

Для построения зависимости объём-давление сначала проводится параметрическое исследование: внутреннее давление  $p$  изменяется от 5 до 100 МПа с шагом 5 МПа, соответствующее текущему давлению изменение объёма рассчитывается по формуле (25). После этого полученный набор значений интерполируется многочленом второй степени и получается зависимость изменения давления от введённого объёма вида:

$$p(\Delta V) = A(\Delta V)^2 + B\Delta V \quad (26)$$

Подставляя значение  $\Delta V = 0.05$  мл в (26), получаем искомое значение давления.

Далее представлены графики зависимости изменения давления при введении внутрь оболочки несжимаемой жидкости объёмом 0.05 мл.

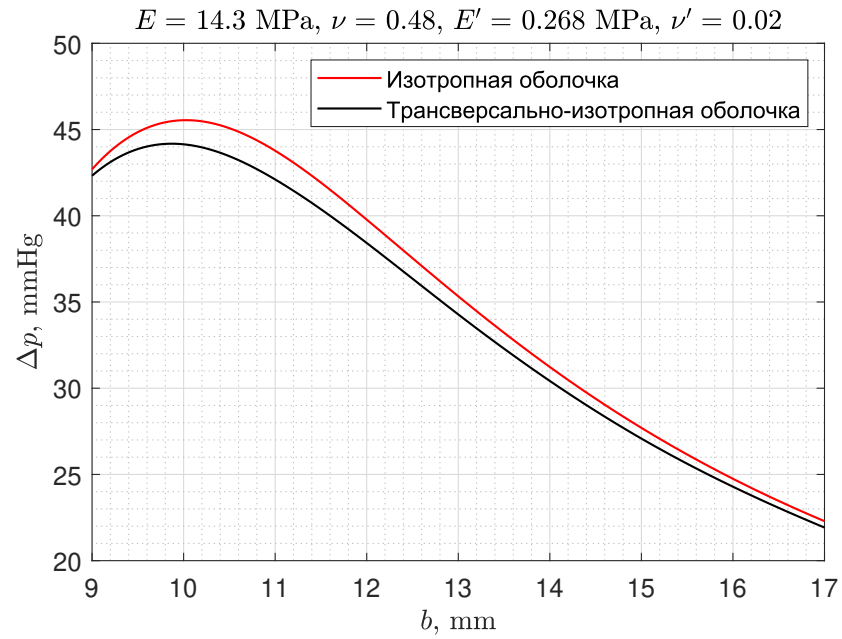


Рис. 14. Изменение значения внутреннего давления для изотропной и трансверсально-изотропной оболочек при различной длине полуоси  $b$ .

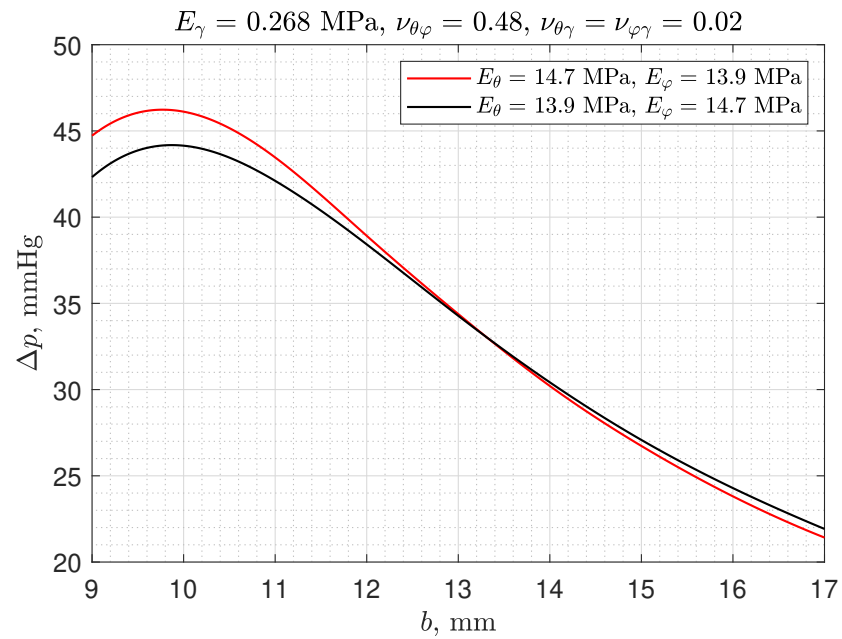


Рис. 15. Изменение значения внутреннего давления для ортотропной оболочки при различной длине полуоси  $b$ .

## Сравнение результатов

Ниже приводится сравнение результатов, полученных по безмоментной теории и с помощью конечно-элементного моделирования в пакете COMSOL Multiphysics.

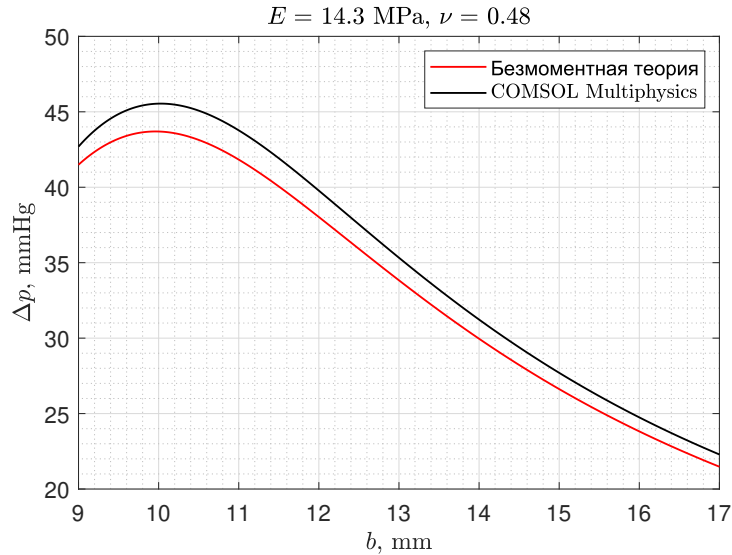


Рис. 16. Сравнение результатов для изотропной оболочки.

Сравнение для изотропной и трансверсально-изотропной оболочек (рис. 16, 17) показывает, что безмоментная теория даёт более низкие значения давлений, но при этом расхождение с вычислениями в COMSOL не такие большие — различие значений давления не превышает 2 мм рт. ст.

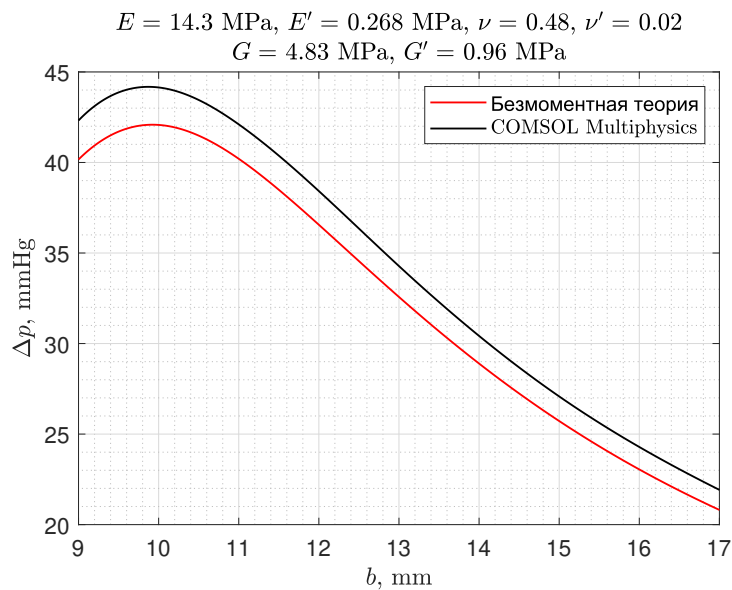


Рис. 17. Сравнение результатов для трансверсально-изотропной оболочки.

Сравнение для ортотропных оболочек (рис. 18, 19) даёт большее различие значений давления, при этом разница между значениями не превышает 4 мм рт. ст. Но при этом вид графиков существенно отличается — значения давления, полученные по безмоментной теории убывают с ростом параметра  $b$ .

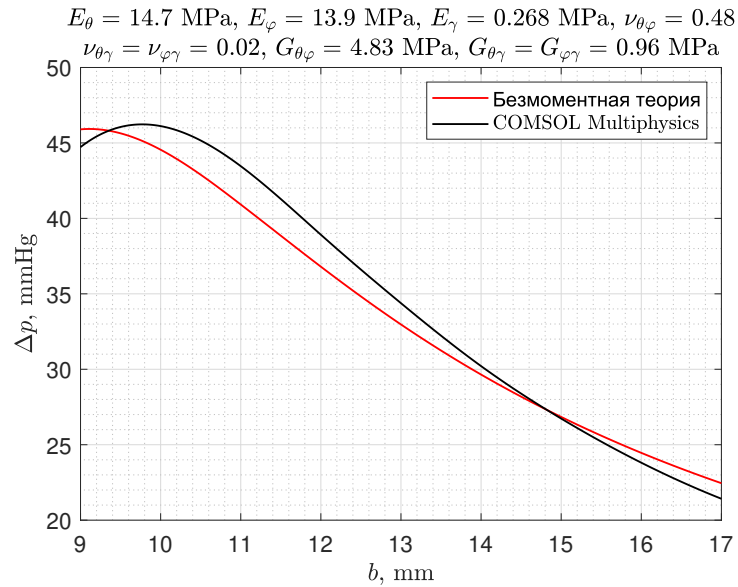


Рис. 18. Сравнение результатов для ортотропной оболочки (модуль упругости в направлении меридиана больше, чем в направлении параллели).

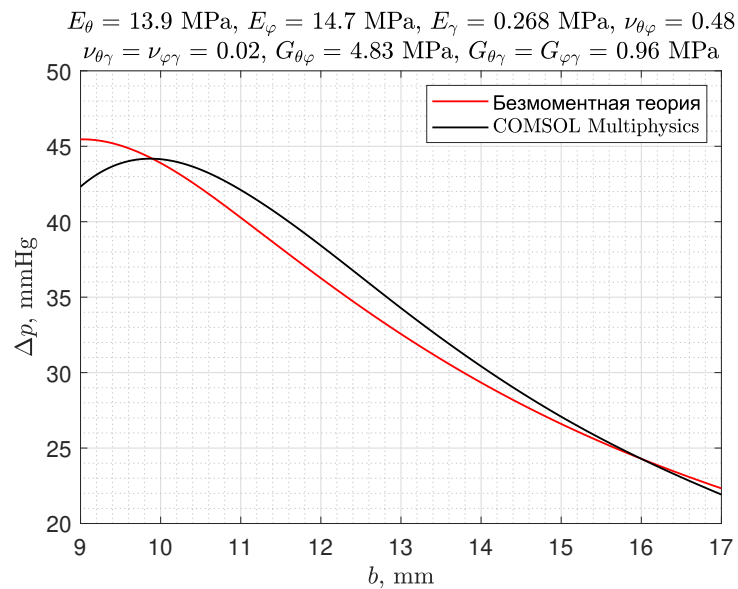


Рис. 19. Сравнение результатов для ортотропной оболочки (модуль упругости в направлении меридиана меньше, чем в направлении параллели).

## Заключение

Построена математическая модель, позволяющая найти изменение объёма эллипсоидальной оболочки вращения при нагружении этой оболочки внутренним давлением  $p$ . Помимо этого была решена обратная задача: по заданному изменению объёма оболочки можно определить давление, которое вызовет такое изменение объёма. Таким образом, возможно оценить повышение внутреннего давления при введении внутрь оболочки дополнительного объёма несжимаемой жидкости. Данная задача описывает кратковременное повышение ВГД при введении ИВИ.

Анализ результатов показывает, что для сплюснутой оболочки (форма склеральной оболочки глаза при гиперметропии) значение повышения ВГД больше, чем для вытянутой оболочки (форма склеральной оболочки при миопии). То есть можно предположить, что риск возникновения осложнений после ИВИ при миопии меньше.

Также на значения внутреннего давления и изменение формы оболочки влияет учёт анизотропии склеры. Сферическая ортотропная оболочка при увеличении внутреннего давления принимает форму сплюснутой эллипсоидальной оболочки, если модуль упругости в направлении меридиана больше, чем в направлении параллели. А в случае когда модуль упругости в направлении меридиана меньше, форма оболочки представляет собой вытянутый эллипсоид вращения.

Помимо этого, были проведены расчёты с использованием метода конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics. Как показало сравнение, полученные результаты неплохо согласуются с результатами, полученными по безмоментной теории.

## Список литературы

1. Интравитреальные инъекции: теория и практика / Э.В. Бойко, С.В. Сосновский, Р.Д. Березин [и др.] // Офтальмологические ведомости. 2010. № 3(2): 28-32.
2. Бубнова И.А., Юлова А.Г. Изменение морфометрических параметров ДЗН на фоне острого повышения ВГД после интравитреальных инъекций // Национальный журнал глаукома. 2016. № 15(2): 54-60.
3. Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000.
4. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
5. Иомдина Е.Н., Бауэр С.М., Котляр К.Е. Биомеханика глаза: Теоретические аспекты и клинические приложения. М.: Реал Тайм, 2015.
6. Филин А. П. Элементы теории оболочек. Изд. 2-е, доп. и перераб. Л.: Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1975.